Hilfsmittelfreier Aufgabenteil

1 HMF-Aufgaben

1.1 HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 4x^3 - 12x$$

a) Zeigen Sie, dass $x = 1$ eine lokale Minimalstelle von f ist.

(3 P)

b) Geben Sie einen Funktionsterm einer Stammfunktion F von f mit

$$F(0) \neq 0$$

an.

(2 P)

Lösung

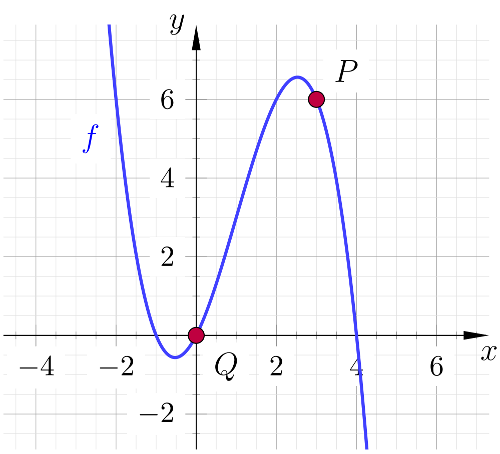
Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und Lösung bzw. $\boxed{Ctrl}$ und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

1.2 HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

dargestellt.



Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(3|3)$ heißt t_P, diejenige im Punkt $Q(0|0)$ heißt t_Q.

a) Es ist $f'(3) = -\frac{5}{2}$.
Ermitteln Sie zeichnerisch die Nullstelle der Tangente t_P.

(2 P)

b) Prüfen Sie rechnerisch, ob die Tangente t_Q durch P verläuft.

(3 P)

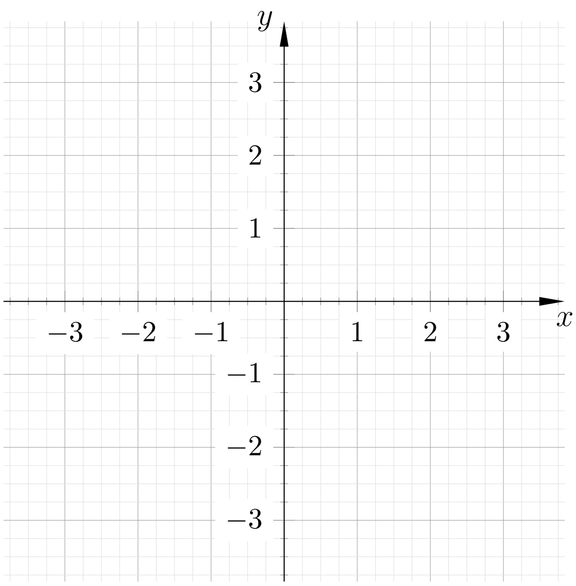
Lösung

1.3 HMF 3 - Analysis (Pool 1)

Es gibt Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:

- $f(0) = 2$
- $f'(-1) = 0$ und $f''(-1) < 0$

a) Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion mit diesen Eigenschaften in das abgebildete Koordinatensystem.



(2 P)

b) Eine der Funktionen mit den obigen Eigenschaften hat den Funktionsterm

$$-0{,}5x^4 + bx + c$$

Bestimmen Sie die Werte von b und c.

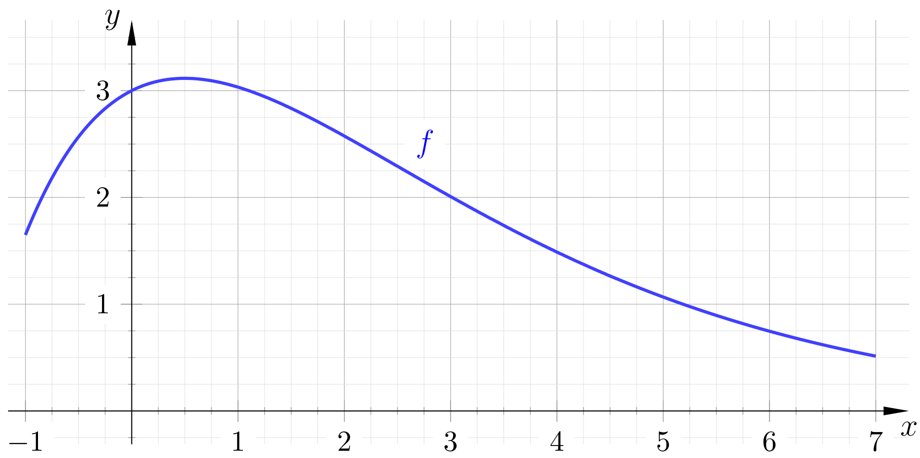
(3 P)

Lösung

1.4 HMF 4 - Analysis (Pool 2)

Die Abbildung zeigt Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = (2x+3)e^{-0{,}5x}$$



a) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit

$$F(x) = (-4x-14)e^{-0{,}5x}$$

eine Stammfunktion von f ist.

(2 P)

b) Untersuchen Sie, ob für jede reelle Zahl $k > 0$ gilt:

$$\int_0^k f(x) < 14$$

(3 P)

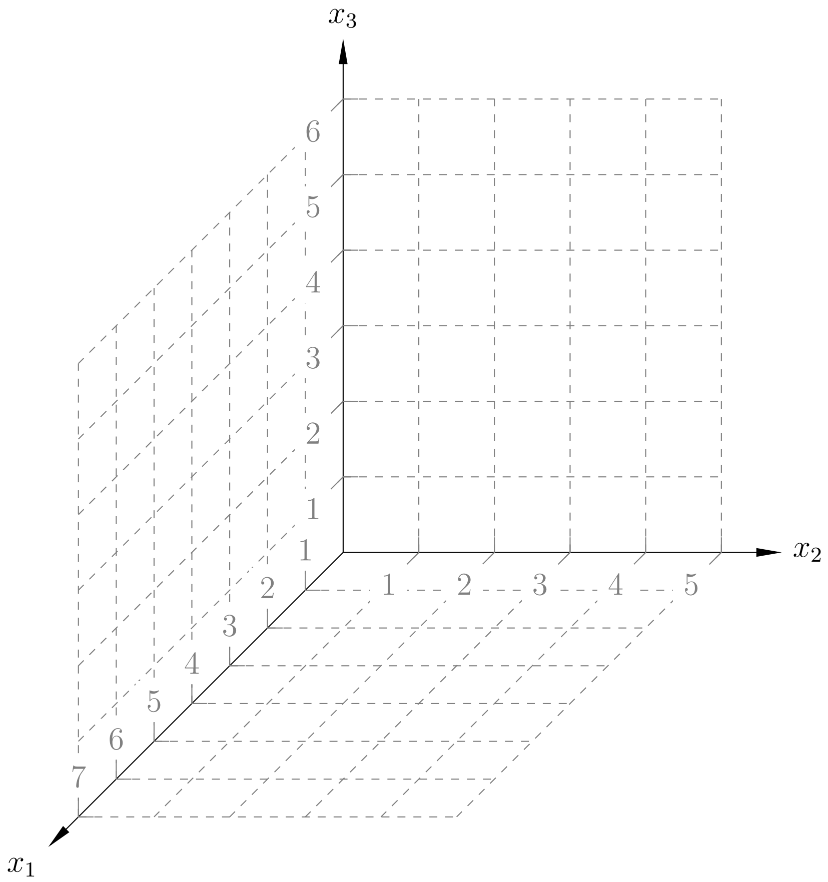
Lösung

1.5 HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist die Ebene E mit

$$E : x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

Die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind die sogenannten Spurpunkte der Ebene E. So ist $S_1(6|0|0)$ ein Spurpunkt der Ebene E.



a) Geben Sie die Koordinaten der anderen beiden Spurpunkte S_2 und S_3 der Ebene E an und zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ in das Koordinatensystem ein.

(3 P)

b) Es gibt unendlich viele Geraden, die parallel zu E sind und durch den Punkt $P(2|5|7)$ verlaufen.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden g.

(2 P)

Lösung

1.6 HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist die Ebene E mit

$$E : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

a) Geben Sie diejenige Zahl a an, für die der Punkt $A(a|0|-1)$ in der Ebene E liegt.

(1 P)

b) Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g, die senkrecht auf E steht und durch den Punkt $B(1|3|4)$ verläuft.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

(4 P)

Lösung

1.7 HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Für alle reellen Zahlen a ist sowohl eine Ebene E_a mit

$$E_a : x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5$$

als auch eine Gerade g_a mit

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2+a \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es keine Zahl a gibt, für die g_a orthogonal zu E_a verläuft.

(2 P)

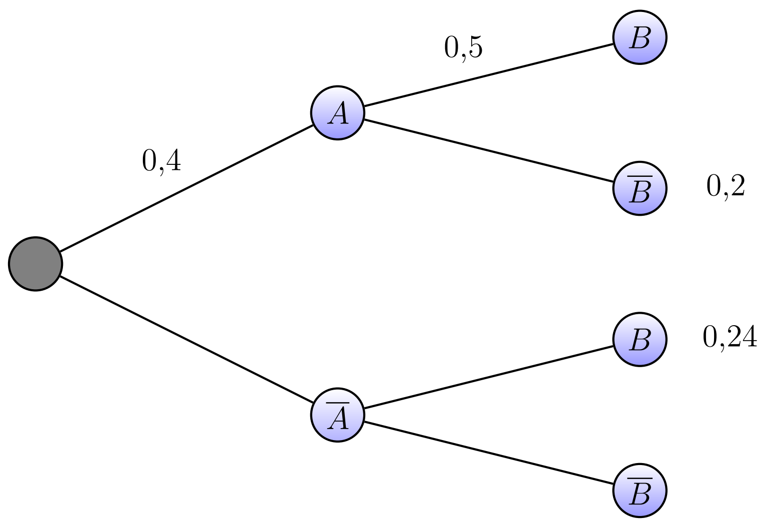
b) Untersuchen Sie, ob es einen Wet für a gibt, so dass die Gerade g_a und die Ebene E_a keinen gemeinsamen Punkt haben.

(3 P)

Lösung

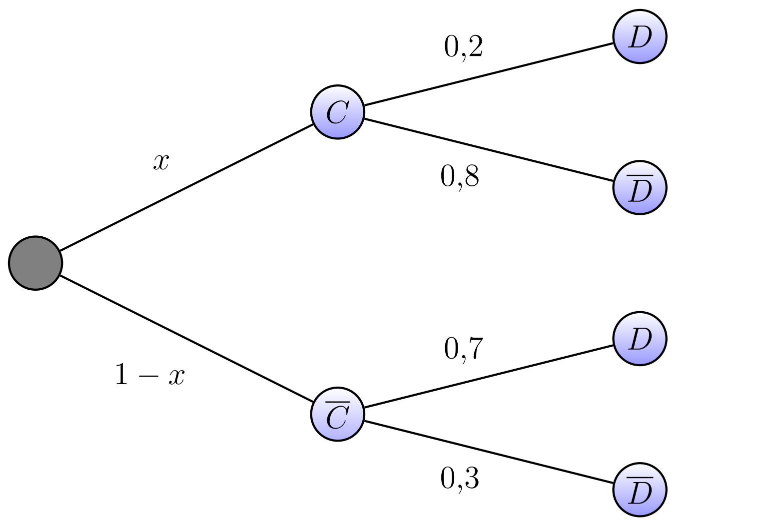
1.8 HMF 8 - Stochastik (Pool 1)

a) Vervollständigen Sie das folgende Baumdiagramm.



(3 P)

b) Bestimmen Sie für das folgende Baumdiagramm denjenigen Wert für x, für den $P(D) = 0{,}6$ ist.



(2 P)

Lösung

1.9 HMF 9 - Stochastik (Pool 1)

Ein sechsseitiger Spielwürfel wird fünfmal geworfen.

a) Ordnen Sie jedem Ereignis denjenigen Term zu, dessen Wert die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist.

Es werden genau zwei Sechsen geworfen.

☐ $4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

☐ $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

☐ $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

☐ $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$

☐ $\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Es wird mindestens eine Sechs geworfen.

☐ $4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

☐ $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

☐ $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

☐ $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$

☐ $\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Es werden genau zwei Sechsen geworfen, wobei die zweite Sechs erst im letzten Wurf fällt.

☐ $4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

☐ $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

☐ $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

☐ $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$

☐ $\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$

(3 P)

b) Geben Sie ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit

$$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

an.

(2 P)

Lösung

1.10 HMF 10 - Stochastik (Pool 2)

Eine Urne enthält weiße und rote Kugeln. Es wird fünfmal mit Zurücklegen gezogen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, keine rote Kugel zu ziehen, falls sich in der Urne eine weiße und neun rote Kugeln befinden.

(2 P)

b) Es ist p die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Zug eine rote Kugel zu ziehen.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.
Bestimmen Sie alle Werte für p, für die

$$P(X=0)=P(X=1)$$

gilt.

(3 P)

Lösung